(مقالهٔ پژوهشی)

مقایسه‌ای بر دیدگاه‌های مجزّا و هم‌زمان برای حل عددی اندرکنش حرارتی سیّال و جامد*

عماد تندیس[۱]   علی اشرفی زاده[۲]

چکیده حل عددی مسائل اندرکنش حرارتی سیّال-جامد (CHT) که شامل چندین ناحیهٔ محاسباتی هستند به لحاظ هزینه‌های محاسباتی و پایداری حل، ازجمله موضوعات چالش‌برانگیز به شمار می‌آید. علت عمده این چالش‌ها را می‌توان به همبستگی بین معادلات در نواحی مختلف و همچنین همبستگی بین معادلات حاکم درون ناحیهٔ سیّال مرتبط دانست. این مقاله به بررسی مقایسه‌ای دو دیدگاه جهت اعمال همبستگی معادلهٔ انرژی در مرز مشترک بین نواحی می‌پردازد: دیدگاه مجزّا و دیدگاه هم‌زمان. در دیدگاه اوّل، اعمال دقیق همبستگی به کمک استفاده از روش‌های تکراری امکان‌پذیر است، حال‌آنکه دیدگاه دوم، بر مبنای حل هم‌زمان معادلات انرژی در تمام نواحی است. به عبارت دقیق‌تر، هدف اصلی در پژوهش حاضر توسعه سه حلگر CHT بر مبنای روش حجم محدود و مقایسه هزینه‌های محاسباتی آنها جهت شبیه‌سازی اندرکنش حرارتی سیّال-جامد با درجات مختلف همبستگی است. هر سه حلگر مورد نظر، در شیوه اعمال همبستگی بین فشار و سرعت در سیّال، مشترک می‌باشند و تفاوت آنها در شیوه اعمال همبستگی بین معادلات انرژی در نواحی مختلف و همچنین بین انرژی و ممنتوم در سیّال است. همچنین OpenFOAM به‌عنوان یک نرم‌افزار منبع باز جهت توسعه الگوریتم‌های پیشنهادی مورد استفاده قرار می‌گیرد. سپس، دقّت و هزینهٔ محاسباتی حلگرهای مذکور، به کمک شبیه‌سازی مسئلهٔ اندرکنش بین جابجایی آزاد در سیّال و رسانش در دیواره عمودی مجاور در حالت‌های مختلفی از همبستگی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. نتایج حاصل از حل حالت‌های مختلف مسئلهٔ مورد نظر نشان می‌دهد که برخلاف آنچه درحلگرهای OpenFOAM اعمال شده، به‌کارگیری حلقهٔ مجزّا جهت تضمین همبستگی انرژی- انرژی برای هر تکرار، هزینه‌های محاسباتی را بخصوص برای مسائل با همبستگی قوی تا حد زیادی کاهش می‌دهد.

واژه‌های کلیدی اندرکنش حرارتی سیّال جامد، دیدگاه هم‌زمان، دیدگاه مجزّا، همبستگی، حجم محدود، سرعت همگرایی، OpenFOAM

Comparison of Monolithic and Partitioned Approaches for the Solution of Fluid-Solid Thermal Interaction Problems

E. Tandis   A. Ashrafizadeh

Abstract *Numerical solution of conjugate heat transfer (CHT) problems in multi-region domains is a challenging issue in terms of efficiency and stability due to inherent coupling between governing equations in separate sub-domains. This paper aims at comparing two distinct strategies for coupling energy equations at interface of regions: partitioned and monolithic. While the former enforces strong coupling via iterative procedures, the latter suggests simultaneous solution of energy equation throughout all regions at once. More precisely, the primary objective of this study is to compare computational costs for three finite volume- based CHT solvers which share a same method for handling pressure-velocity coupling in the fluid, i.e. semi-implicit projection method, and are distinguished from the coupling strategy for energy equation at interface of interacting sub-domains. The first method applies simultaneous solution of energy equation across all regions while second and third ones use separate solver for each region with difference in handling iterative loops. The accuracy and convergence rate of three algorithms are assessed via transient solution of conjugate free convection in fluid and conduction in vertical wall. Finally, it is concluded that, in contrast to partitioned solver in OpenFOAM for CHT problems, employing a separate loop to enforce energy-energy coupling per iteration, can be much more beneficial in terms of computational costs.*

Key Words Conjugate Heat Transfer, Monolithic, Partitioned, Coupling, Finite Volume, Convergence Rate, OpenFOAM.

---

*تاریخ دریافت مقاله ۹۸/۱۰/۲ و تاریخ پذیرش آن ۹۹/۲/۶ می‌باشد. **DOI:** 10.22067/fum-mech.v31i1.84760

(۱) نویسندهٔ مسئول: دانشجوی دکتری، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدّین طوسی، تهران، ایران.
e.tandis@email.kntu.ac.ir

(۲) استاد دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدّین طوسی، تهران، ایران

مقدّمه

اندرکنش حرارتی سیّال و جامد که با عنوان اختصاری CHT شناخته شده است در مسائل کاربردی متنوعی شامل صنعتی، علوم زیستی و غیره نقش اساسی دارد و به همین دلیل توجّه محقّقان زیادی را به خود جلب کرده است. مسائلی از این نوع را می‌توان جزء دسته‌ای از مسائل چند فیزیکی به شمار آورد که ویژگی بارز آنها وجود چندین ناحیهٔ محاسباتی سیّال و جامد بوده به‌طوری‌که معادلات حاکم بر آنها در مرز مشترک نواحی، همبسته می‌باشند. علاوه بر این نوع همبستگی، مسائل CHT دارای همبستگی‌های دیگری نیز هستند که ناشی از وابستگی معادلات انرژی، ممنتوم و پیوستگی به هم است. این موضوع، به‌خصوص در مسائل شامل جابجایی آزاد که عدد گراشف در آنها مقادیر بالایی دارد، بر پیچیدگی این نوع از مسائل چند فیزیکی می‌افزاید.

آنالیز این دسته از مسائل چند فیزیکی می‌تواند به شیوه‌های گوناگونی صورت پذیرد. اوّلین و ساده‌ترین روش، استفاده از روش‌های تحلیلی است که می‌تواند در مورد پارامترهای مؤثر بر مسئله و همچنین جهت اعتبارسنجی الگوریتم‌های عددی در حل مسائل ساده مورد استفاده قرار گیرد. این روش، بااینکه جواب‌های نسبتاً دقیقی در برخی مسائل ساده [1-3] ارائه می‌دهد ولی در تحلیل دقیق مسائل پیچیده در این حوزه، ناتوان است. علاوه بر روش تحلیلی، روش‌های آزمایشگاهی نیز می‌تواند به‌عنوان ابزاری قدرتمند در حل مسائل واقعی استفاده شوند؛ اما با وجود دقّت مطلوب، روش‌های آزمایشگاهی معمولاً پرهزینه و زمان‌بر هستند. نهایتاً، روش‌های عددی به‌عنوان گزینه‌ای که می‌توانند بازه وسیعی از مسائل CHT را در زمانی نسبتاً کم و با دقّتی معقول حل نمایند، در چند دههٔ پیشین، موضوع بسیاری از تحقیقات بوده است [4-6].

الگوریتم‌های عددی در حوزهٔ مسائل CHT – و به‌طورکلی مسائل چند فیزیکی- را، از نظر چگونگی اعمال همبستگی بین معادلات، می‌توان به دو دسته عمده تقسیم‌بندی کرد: روش‌های مجزّا (Partitioned) و روش‌های هم‌زمان (Monolithic). ویژگی مثبت روش‌های مجزّا را می‌توان به امکان استفاده از حلگرهای موجود و حتی تجاری دانست به‌گونه‌ای که ترکیب مناسب این حلگرها به کمک کدهای واسط (Interface)، می‌تواند شیوه‌های گوناگونی از این روش‌ها را با بازده‌های محاسباتی متفاوت ارائه دهد. با وجود انعطاف‌پذیری مناسب روش‌های مجزّا، این روش‌ها در مقایسه با روش‌های هم‌زمان بازده محاسباتی پایین‌تری دارند. به‌عبارت‌دیگر، حل مسائلی که همبستگی معادلات به هم از نوع قوی است روش‌های هم‌زمان می‌توانند در زمانی کمتر و با پایداری بیشتری به حل مسئله بپردازند. در الگوریتم‌های مجزّا، شیوه مشترک، به این صورت است که حل‌های مرتبط با نواحی سیّال و جامد به‌صورت متوالی فراخوانده می‌شوند [7-10] و اعمال دقیق شرایط مرزی در مرز مشترک به کمک حلقه‌های predictor-corrector صورت می‌پذیرد و این مسلماً هزینه‌های محاسباتی بالایی را به حلگرهای CHT تحمیل می‌کند. بر خلاف روش‌های مجزّا، در الگوریتم‌های هم‌زمان، معادلاتی که اساس فیزیکی و متغیرهای وابسته مشابهی در نواحی سیّال و جامد دارند – در اینجا معادلهٔ انرژی- در تمام فضای محاسباتی به‌صورت هم‌زمان حل می‌شوند و به‌این‌ترتیب سرعت همگرایی بالا می‌رود [11, 12].

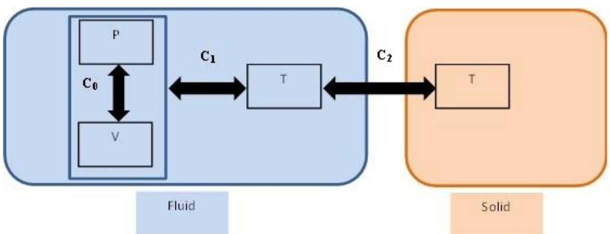
اعمال مناسب شرایط مرزی در مرز مشترک – که آن را شرط مرزی همبستگی می‌نامیم- یکی از پارامترهای مهم در دقّت و هزینه‌های محاسباتی حلگرهای CHT و بخصوص در حالت حل گذرا است. این مسئله، موضوع بسیاری از مطالعات صورت گرفته در زمینه حل عددی مسائل اندرکنش گرمایی بین سیّال و جامد بوده است [13-16]. هدف این مطالعات

عمدتاً ارائه شیوه‌های اعمال شرط مرزی همبستگی به‌گونه‌ای بوده است که ۱) دقّت بالا، ۲) پایداری حل، ۳) هزینه محاسباتی پایین و ٤) پایستاری را نتیجه دهد. به‌عنوان‌مثال، شرط مرزی از نوع دیریشله-رابین که مقادیر ضرایب آن موضوع بسیاری از تحقیقات پیشین [15] بوده است به‌صورت مکرر برای اعمال شرط مرزی همبستگی در این‌گونه مسائل و با هدف بهینه‌سازی دقّت و پایداری الگوریتم‌های مجزّا پیشنهاد گردیده است. بر اساس این روش‌ها، شرط مرزی پیشنهادی در مرز مشترک سیّال و جامد، روی حلگر سیّال از نوع شرط دما ثابت و برای حلگر جامد از نوع شرط مرزی شار حرارتی است. علاوه بر این، شروط مرزی دیگری برای مرز مشترک ارائه شده است. از میان آنها می‌توان به شرط مرزی رابین-رابین [16] اشاره کرد که نتایج ارائه شده حاصل از اعمال آن، قابل قبول گزارش شده است.

ازآنجایی‌که در مسائل CHT، معادلات سیّال شامل پیوستگی، ممنتوم و انرژی و همچنین معادلهٔ انرژی در جامد ایفای نقش می‌کنند، به‌منظور طراحی روش‌های عددی با کارایی بهتر، نیاز است تا به‌طور دقیق‌تر، همبستگی بین معادلات مورد مطالعه قرار گیرد. به همین منظور، در این تحقیق به بررسی دقیق‌تر همبستگی بین متغیرهای مجهول شامل فشار، سرعت و دما در سیّال و همچنین دما در جامد می‌پردازیم. شکل (۱) این همبستگی‌ها را به‌صورت شماتیک نشان می‌دهد.

در مسائل سیّالاتی فارغ از نقش معادلهٔ انرژی، همبستگی بین سرعت و فشار یک خاصیت ذاتی در معادلات ممنتوم و پیوستگی است و در اینجا آن را همبستگی نوع صفر (C_0) می‌نامیم. مطالعات گسترده‌ای در زمینه نقش این نوع همبستگی در معادلات حاکم بر سیّال، شیوه‌های گوناگون اعمال آن در الگوریتم‌های مختلف و نقش آن در کارایی الگوریتم‌ها صورت گرفته است [19-17]. لذا، این نوع همبستگی در این مقاله کمتر مورد توجّه قرار گرفته و یک روش مجزّا و معمول در سایر حلگرها، جهت اعمال آن استفاده خواهد شد؛ اما با توجّه به هزینهٔ محاسباتی آن، نقش آن در کارایی الگوریتم‌های مورد نظر در این تحقیق، شرح داده خواهد شد.

بر اساس مطالعات پیشین، دو نوع همبستگی دیگر، نقش مؤثری در پایداری و بازده محاسباتی الگوریتم‌های عددی دارند: همبستگی بین معادلات ممنتوم و انرژی در نواحی شامل سیّال که آن را همبستگی نوع اوّل می‌نامیم و همبستگی بین معادلات انرژی در نواحی سیّال و جامد که مرز مشترک دارند که از آن با عنوان همبستگی نوع دوم یاد می‌کنیم. این دو نوع همبستگی در شکل (۱)، به ترتیب با C_1 و C_2 نشان داده‌شده‌اند.



شکل «۱»: نمایش همبستگی‌های مختلف در یک مسئلهٔ CHT

سؤال منطقی که در ایـن خصـوص مهـم بـه نظـر می‌رسد ترتیب نحوهٔ اعمال همبستگی در ارتباط با هـم است. به‌عنوان‌مثال در دیدگاه کاملاً مجزاً، آیا بهتر است در الگـوریتم عـددی، ابتـدا معـادلات سـیّال – شـامل پیوستگی، ممنتوم و انرژی – را تـا دقّـت بـالایی ارضـا کنیم (تضمین C_0 و C_1) سپس به حل معادلهٔ انـرژی در جامد بپردازیم و در نهایت همبستگی بین معادلهٔ انرژی در جامد و سیّال را با یک حلقهٔ بیرونـی تضـمین کنـیم (تضمین C_2) ؟ یا اینکه در ابتدا فقط معادلات پیوستگی و ممنتوم را با دقّـت بـالا ارضـا کنـیم (تضـمین C_0) و سپس معادلات انرژی سیّال و جامـد را در یـک حلقـهٔ دیگـر تضـمین نمـاییم (تضـمین C_2) و درنهایـت همبسـتگی بـین دو دسـته معادلـهٔ حاصـل - معـادلات انرژی از یـک طـرف و پیوسـتگی و ممنتـوم از طـرف دیگر – را از طریق یـک حلقـهٔ بیرونـی اعمـال نمـاییم (تضمین C_1)؟

اهمّیـت سـؤال مـذکور بـا نگـاهی بـر حلگرهـای موجود در نرم‌افـزار منبـع بـاز و رایـج OpenFOAM [20] در مسائل CHT بیشتر مشخص می‌شود [21,22]. در نسخه extent4.0 از این نرم‌افزار، چهـار حلگـر در این خصوص وجود دارد و هر دو استراتژی شـرح داده شده در پاراگراف قبل، در آنها قابل مشـاهده اسـت. در حلگر اوّل و دوم، به ترتیب chtMultiRegionFoam و chtMultiRegionSimpleFoam، در هر تکـرار از یک حلقهٔ بیرونی، همبستگی C_0 به‌صورت قوی اعمـال شده و دو همبستگی دیگر به‌واسطه همان حلقهٔ بیرونی مشـترک تضـمین مـی‌شـوند. در حلگـر سـوم، conjugateHeatFoam، در هر گام زمانی، C_0 وC_2 قویاً اعمـال شـده ولـی C_1 بـه‌صـورت ضـعیف اعمـال شـــده اســـت. در حلگـــر چهـــارم، conjugateHeatSimpleFoam، ابتدا C_0 و C_2 قویـاً اعمال شده و یک حلقهٔ تکرار بیرونـی جهـت تضـمین C_1 اعمال شده است. قابل ذکر است کـه حلگـر دوم و چهارم فقط جهت حل دائم طراحی‌شده‌انـد حـال‌آنکـه حلگر اوّل و سوم، برای حل گـذرا بـه کـار مـی‌رونـد. همچنین، در حلگرهای سوم و چهارم، معادلات انـرژی در سیّال و جامد، به‌صورت هم‌زمان حل می‌گردد و در حلگرهای اوّل و دوم الگوریتم مجزاً به کار گرفته شـده است. علاوه بر این، حلگرهـای سـوم و چهـارم، فقـط قادر به حل مسائلی شامل یک ناحیهٔ سیّال و یک ناحیهٔ جامد هستند.

مقالهٔ حاضر، با نگـاهی عمیـق‌تـر، بـه تـأثیر شـیوه اعمال همبستگی بـین معـادلات در کـارایی حلگرهـای رایج در مسائل CHT می‌پردازد. به‌طور دقیق‌تر، در ایـن تحقیق، توسعه و مقایسه سه نوع حلگر در زمینـه حـل مسائل CHT به روش‌های هم‌زمان و مجـزّا شـرح داده می‌شود به‌طوری‌که دو تا از الگوریتم‌ها از نوع مجـزّا و یکی از آنهـا از نـوع حلگـر هـم‌زمـان اسـت. ویژگـی مشترک بین سه حلگر مورد نظر ایـن اسـت کـه شـیوهٔ گسسته‌سازی معادلات در همگی، بر مبنـای روش‌هـای حجـم محـدود اسـت و همچنـین بـه‌منظـور اعمـال همبستگی فشار- سرعت در سیّال (C_0)، از الگـوریتمی از خـانواده Semi-Implicit Projection Method (SIPM) به نام الگوریتم PISO بهره گرفته شده است. تفـاوت الگـوریتم‌هـای مـورد نظـر، در نحـوهٔ اعمـال همبستگی‌های نوع اوّل و دوم است. روش هم‌زمـان بـا یک حلقهٔ درونی جهت اعمال همبستگی C_0، بـه حـل جریان درون سیّال می‌پردازد و پس از حـل سـیّال، بـه حل هم‌زمان معادلهٔ انـرژی در تمـامی نـواحی سـیّال و جامد می‌پردازد (اعمال قوی C_2). تمام این روند –حل جریان سیّال و معادلات انرژی- برای هـر گـام زمـانی درون یک حلقهٔ تکرار قـرار دارد بـه‌طـوری‌کـه شـرط خـروج از حلقـه، ارضـای دقیـق معـادلات ممنتـوم، پیوستگی، انرژی و همچنین ارضـای همبسـتگی C_1 تـا مقدار مطلـوب اسـت. در روش مجـزّا، بعـد از اعمـال همبستگی C_0 در سیّال به شیوه مـذکور، دو دیـدگاه در مورد نحوهٔ اعمال دو همبستگی دیگر بررسی می‌شـود: اعمال همبستگی‌های C_1 و C_2 در یـک حلقـهٔ مشـترک

بیرونی یا استفاده از یک حلقهٔ تکرار دیگر (داخلی) جهت تضمین C_2 در هر تکرار از حلقهٔ بیرونی. در نتیجه، دو الگوریتم برای حلگر مجزاً، یکی بر اساس حلقهٔ جداگانه و دیگری بر اساس حلقهٔ واحد، در این تحقیق ارائه گردیده است. در نهایت عملکرد سه الگوریتم مورد نظر به کمک حل مسئلهٔ اندرکنش حرارتی بین دیوار عمودی و جریان جابه‌جایی آزاد در سیّال مجاور، مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. به همین منظور، با تغییر خواص ترموفیزیکی سیّال و جامد، شرایط همبستگی مختلفی برای مسئله اعمال شده، در ابتدا به اعتبارسنجی هر سه حلگر پرداخته و سپس توانایی آنها به لحاظ هزینهٔ محاسباتی به کمک بررسی سرعت همگرایی در حالت‌های مختلف مطالعه می‌شود.

معادلات ریاضی

در این بخش فرمولاسیون ریاضی یک مسئلهٔ CHT شامل معادلات حاکم و همچنین شرط مرزی سازگاری (شرط مرزی همبستگی) بین نواحی سیّال و جامد ارائه می‌شود. معادلات گذرای مربوط به جریان سیّال بوزینسک (Boussinesq)، شامل پیوستگی، ممنتوم و انرژی به‌صورت زیر است:

$$\nabla.\mathbf{u}=0 \tag{۱}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\mathrm{u}.\nabla\mathbf{u}=-\nabla p+\upsilon\nabla^2\mathbf{u}-\mathbf{g}\beta(T-T_{ref}) \tag{۲}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+(\mathbf{u}.\nabla)T=\frac{1}{\rho C_P}\nabla.(k\nabla T) \tag{۳}$$

که $\mathbf{u}$، p، و T به ترتیب سرعت، فشار و دمای سیّال هستند و باید از طریق فرایند حل محاسبه گردند. متغیر $\mathbf{g}$ بردار شتاب گرانشی و سایر پارامترها، نشان‌دهنده خواص سیّال شامل v ویسکوزیته سینماتیکی، β ضریب انبساط حرارتی، C_p ظرفیت گرمایی ویژه، k رسانندگی و ρ چگالی می‌باشند. همچنین، معادلهٔ انرژی وابسته به زمان برای یک ناحیهٔ جامد را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial T_s}{\partial t}=\frac{1}{(\rho C_P)_s}\nabla.(k_s\nabla T_s) \tag{٤}$$

که در آن اندیس s جهت تمایز کمیّت‌های جامداتی از سیّالاتی استفاده شده است. به‌منظور تکمیل معادلات ریاضی، شرط مرزی‌های مناسب برای بخش سیّال و جامد نیاز است. در اینجا توجّه بیشتر، معطوف به شرط مرزی همبستگی در مرز مشترک سیّال و جامد است. این شرط مرزی بر اساس پیوستگی دما و همچنین پایستاری انرژی روی سطح کنترلی فرضی روی مرز مشترک بوده و به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$T(\Gamma_{f,s},t)=T_s(\Gamma_{f,s},t) \tag{٥}$$

$$n.(k\nabla T)=n.(k_s\nabla T_s) \tag{٦}$$

درجهٔ همبستگی معادلات، به‌مانند بسیاری از خصوصیات پدیده‌های فیزیکی، به کمک اعداد بدون بعد قابل بیان است. به‌منظور استخراج این اعداد، با استفاده از عملیات جبری، معادلات به‌صورت بدون بعد زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}}+\tilde{u}.\nabla\tilde{u}=-\nabla\tilde{p}+\frac{1}{Re^2}\nabla^2\tilde{u}-\frac{Gr}{Re^2}\tilde{T} \tag{٧}$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}}+(\tilde{u}.\nabla)\tilde{T}=\frac{1}{RePr}\nabla^2\tilde{T} \tag{٨}$$

بر اساس معادلات (۷ و ۸)، میزان همبستگی بین معادلات ممنتوم و انرژی به اعداد گراشف $Gr=\frac{g\beta(T_H-T_L)L^3}{\nu^2}$، پرانتل $Pr=\frac{\upsilon}{\alpha}$، و رینولدز $Re=\frac{UL}{\upsilon}$ بستگی دارد به‌طوری‌که برای اعداد گراشف بالا، درجهٔ همبستگی نوع اوّل (C_1) بیشتر است. توجّه

شود که در اینجا، L طول مشخصه مسئله، U سرعت مشخصّه جریان و α ضریب پخش گرمایی است.

به‌منظور کمینه‌سازی همبستگی نوع دوم که ناشی از پیوستگی دما و پایستاری شار گرمایی در مرز مشترک است، از کمیت بدون بعد σ استفاده می‌گردد:

$$\sigma = \frac{k_f/\sqrt{\alpha_f}}{k_s/\sqrt{\alpha_s}} \qquad (۹)$$

هرچه σ به سمت عدد ۱ نزدیک شود همبستگی معادلات انرژی در مرز سیّال و جامد قوی‌تر خواهد بود [12].

روش عددی

در این بخش، جزییات مربوط به الگوریتم عددی سه حلگر CHT که بر اساس حجم محدود عمل می‌کنند بحث می‌شود. در واقع، هر سه روش به جستجوی مقادیری از فشار، سرعت و دما هستند به‌گونه‌ای که معادلات پایستاری -شامل بقای جرم، ممنتوم و انرژی- درون حجم کنترل‌ها و همچنین سطوح کنترل مرزی و به‌خصوص در مرزهای مشترک ارضا شوند. الگوریتم PISO [۲۳] به‌عنوان روشی برای اعمال همبستگی بین سرعت و فشار در جریان سیّال (C_0) برای هر سه حلگر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

فرایند حل در این حلگرها، با گسسته‌سازی معادلهٔ ممنتوم برای جریان سیّال به‌صورت زیر آغاز می‌شود:

$$u_P = \frac{H(u)}{a_P} - \frac{1}{a_P}\nabla p \qquad (۱۰)$$

که در آن a_P نشان‌دهنده ضریب سرعت در حجم کنترل P – واقع در قطر اصلی ماتریس ضرایب – و عملگر H(u) در واقع معرف مجموع ترم‌های منبع شامل نیروی شناوری و سرعت حجم کنترل‌های اطراف در معادلهٔ ممنتوم مربوط به این حجم کنترل است. با جایگزینی معادلهٔ (۱۰) در (۱)، معادلهٔ حاکم بر فشار به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\nabla.\left(\frac{1}{a_p}\nabla p\right) - \nabla.\left[\frac{H(u)}{a_p}\right] = 0 \qquad (۱۱)$$

پس از حل معادلهٔ فشار، شار جرمی ورودی روی سطوح اطراف حجم کنترل، به کمک معادلهٔ زیر به‌روزرسانی می‌شود:

$$F = \rho s_f.u = \rho s.\left[\left(\frac{H(u)}{a_P}\right)_f - \left(\frac{1}{a_P}\right)_f (\nabla p)_f\right] \qquad (۱۲)$$

همان‌طور که ذکر شد وجه تمایز الگوریتم‌ها، در چگونگی اعمال پیوستگی دما و پایستاری شار گرمایی در مرز مشترک – روابط (۵ و ٦) و همچنین همبستگی بین معادلات منتوم و انرژی در نواحی حاوی سیّال است. در خصوص همبستگی در مرز مشترک برای الگوریتم‌های مجزّا، نوع مناسب شرط مرزی برای نواحی سیّال و جامد روی پایداری فرایند حل بسیار تأثیرگذار خواهد بود. شیوه‌های مختلفی از نحوهٔ اعمال این شرط مرزی با هدف مطالعهٔ پایداری حل و بهترین نرخ همگرایی در مرجع [15] مقایسه شده‌اند. Henshaw و همکاران [14] نشان دادند در حالتی که خواص ترموفیزیکی ماده‌های مجاور به هم نزدیک باشد شرط مرزی از نوع رابین-رابین می‌تواند نرخ همگرایی بالایی را نتیجه دهد. در این تحقیق، از این نوع شرط مرزی که در کتابخانه نرم‌افزار OpenFOAM نیز موجود است استفاده می‌شود. نحوهٔ اعمال این شرط مرزی به این صورت است که برای مرزهای سیّال و جامد، ترکیبی از شرط مرزی دیریشله (دمای ثابت) و نیومن (گرادیان صفر) با تأثیر وزنی به ترتیب ω و $1-\omega$

در نظر گرفته می‌شود به‌طوری‌که ضریب وزنی ω از رابطهٔ زیر محاسبه می‌گردد:

$$\omega_{own} = \frac{\frac{k_{nei}}{\Delta_{nei}}}{\frac{k_{nei}}{\Delta_f}+\frac{k_{own}}{\Delta_s}} \quad (۱۳)$$

که در آن زیرنویس own و nei به نواحی دو طرف مرز مشترک و Δ، مطابق شکل (۲)، به فاصله عمودی بین مرکز حجم کنترل‌های مجاور در دو ناحیه اشاره می‌کند.

برای الگوریتم همزمان، حل همزمان معادلهٔ انرژی در تمام فضای محاسباتی نیازمند میانیابی مناسبی برای خاصیت رسانندگی، k، در مرز مشترک است به‌گونه‌ای که اعمال دقیق پایستاری انرژی در این مرز تضمین شود. در غیاب ترم تشعشع در مرز مشترک، شکل گسسته پایستاری انرژی به‌صورت زیر قابل بیان است:

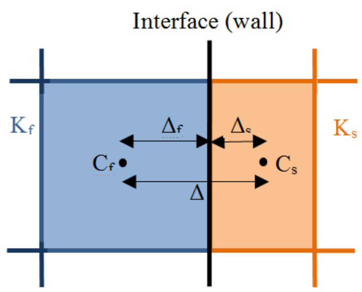
$$k_{nei}\frac{(T_{nei}-T_w)}{\Delta_{nei}} = k_{own}\frac{(T_w-T_{own})}{\Delta_{own}} \quad (۱۴)$$

به‌منظور محاسبه رسانندگی در مرز مشترک، k_{int}، به‌گونه‌ای که معادلات (۵ و ٦) به‌طور مطلوبی ارضا شوند، دو سمت معادلهٔ (۱٤) باید با مقدار $k_{int}\frac{(T_{nei}-T_{own})}{\Delta}$ برابر باشند. با انجام محاسبات جبری ساده در نهایت به رابطهٔ زیر برای رسانندگی روی مرز می‌رسیم:

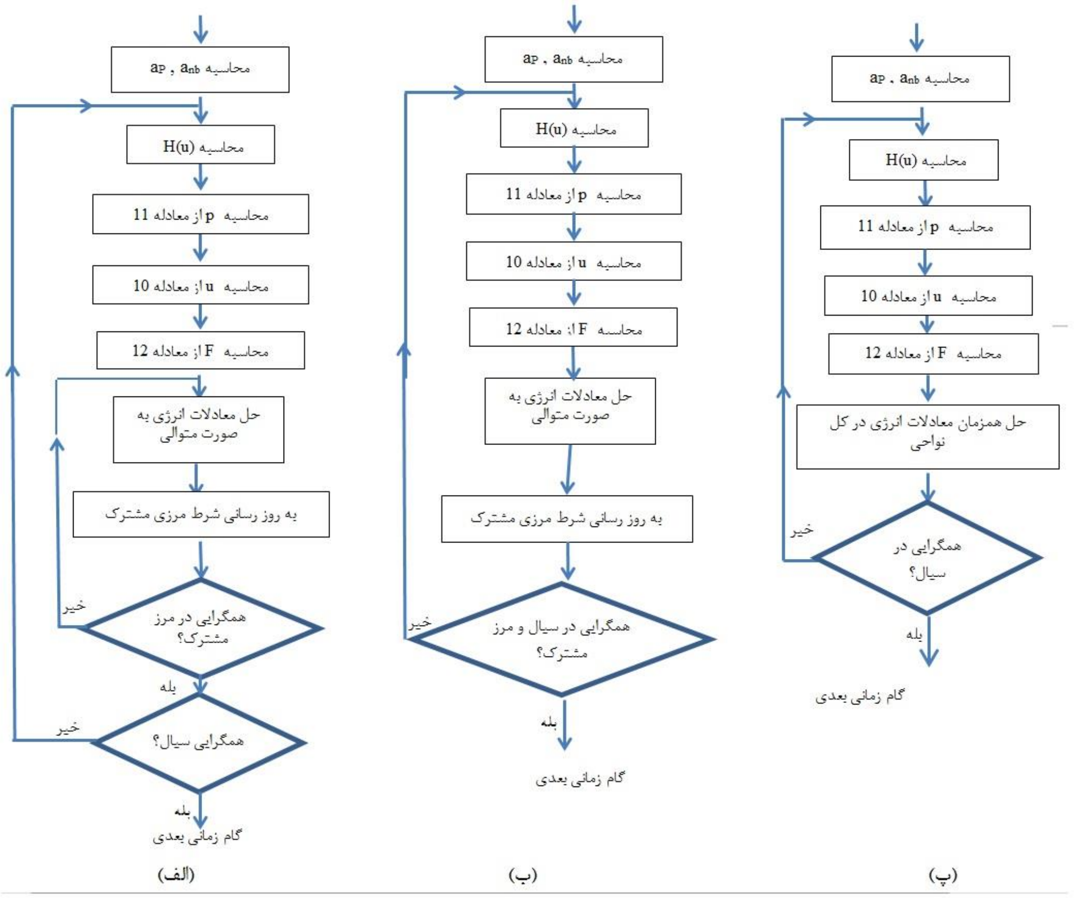
$$k_{int} = \frac{k_f k_s}{\frac{\Delta_f}{\Delta}k_s + \frac{\Delta_s}{\Delta}k_f} \quad (۱۵)$$

تا اینجا، به نحوهٔ گسسته سازی و حل معادلات به‌صورت جداگانه پرداختیم. در خصوص الگوریتم کلی و ترتیب اعمال همبستگی‌ها، همبستگی نوع اوّل برای حلگر همزمان، از طریق یک حلقهٔ تکرار بیرونی تضمین می‌گردد. برای اعمال این همبستگی در دیدگاه مجزاّ، دو روش وجود دارد: استفاده از حلقهٔ مشترک برای اعمال همبستگی نوع اوّل و دوم یا استفاده از دو حلقهٔ جداگانه. شکل (۳) سه الگوریتم مورد نظر را به کمک فلوچارت نمایش می‌دهد.

همان‌طور که در فلوچارت‌های شکل (۳) دیده می‌شود، الگوریتم شکل (الف) که به‌اختصار آن را SIPM-SP (مخفف Semi Implicit Projection Method- Separate Loop) می‌نامیم، از یک حلقهٔ بیرونی برای تضمین همبستگی نوع اوّل و یک حلقهٔ داخلی برای تضمین نوع دوم استفاده می‌شود. حال‌آنکه الگوریتم (ب) که SIPM-IP (مخفف Semi Implicit Projection Method- Integrated Loop) نام دارد، فقط یک حلقه جهت اعمال همبستگی‌های C_1 و C_2 به‌کار گرفته است. در نهایت الگوریتم (پ) که حلگر همزمان بوده و با عنوان SIPM-M (مخفف Semi Implicit Projection Method- Monolithic) شناخته می‌شود، از یک حلقهٔ تکرار برای تضمین همبستگی نوع اوّل استفاده می‌کند و همبستگی نوع دوم، از طریق حل همزمان معادلات انرژی تضمین می‌گردد.



شکل «۲»: وضعیت حجم کنترل در نواحی سیّال (f) و جامد (s)



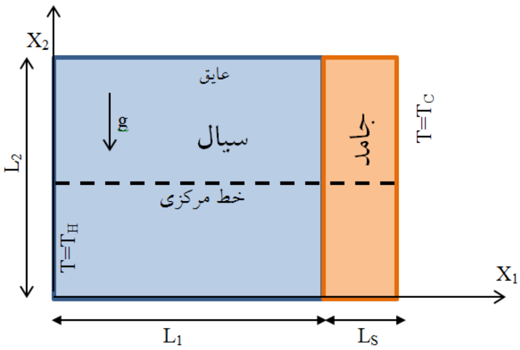
شکل «۳»: فلوچارت سه حلگر CHT الف) SIPM-SP ب) SIPM-IP پ) SIPM-M

در این مطالعه، نـرم‌افـزار منبـع بـاز OpenFOAM نسخه extend4.0 جهت اعمال الگوریتم‌های مورد نظـر روی شبکه‌های سه‌بعدی غیر سازمان یافته به کار گرفته شده است. شایان یادآوری است که حلگر هم‌زمـان بـا عنوان conjugateHeatFoam در نرم‌افزار موجود اسـت که محدودیت تنها دو ناحیه (یک ناحیـهٔ سـیّال و یـک ناحیهٔ جامد) در آن وجود دارد. همچنین، همان‌طور کـه در مقدمه اشاره شد این حلگر استاندارد، همبستگی C_1 را تضمین نمی‌کند. در اینجا، ما به توسعه این الگوریتم به‌منظور اعمال قوی C_1 و همچنین امکـان بـه‌کـارگیری آن در حالت‌هـای چنـد ناحیـه‌ای مـی‌پـردازیم. حلگـر استاندارد دیگر مربوط به مسائل CHT در این نرم‌افزار، یک حلگر مجزاً با نام chtMultiRegionFoam با شـیوه حلقهٔ مشترک (فلوچارت شکل ۳– ب) است که بـرای چندین ناحیهٔ جامد و سیّال طراحی شده است. به‌منظور اعمـال الگـوریتم حلگـر مجـزاً بـا حلقـهٔ جداگانـه (فلوچارت شکل ۳–الف)، در حلگـر اسـتاندارد اخیـر، تغییراتی داده می‌شود.

شبیه‌سازی و نتایج

در این بخش، به‌منظور اعتبار سنجی، نتایج حل عـددی برای مسئلهٔ دوبعـدی انـدرکنش حرارتـی بـین جریـان جابجـایی آزاد در سـیّال و هـدایت در دیـوار عمـودی

مجاور که شماتیک آن در شکل (٤) نمایش داده شده است، ارائه می‌شود.



شکل «٤»: شماتیک مسئلۀ جابجایی آزاد سیّال در کنار دیوار عمودی

این مسئله، به دلیل قابلیّت بررسی رفتار حلگر در درجات مختلف همبستگی‌های نوع اوّل و دوم، در تحقیقات پیشین به‌صورت مکرر شبیه‌سازی شده است. در میان آنها، کاظمی کامیاب و همکاران [24] از یک حلگر مجزّا با همبستگی ضعیف جهت حل این مسئله استفاده کردند تا عملکرد مؤثر حلگر پیشنهادی‌شان را با فرضی کلی اثبات کنند: تمامی خواص برای سیّال و جامد ثابت هستند به‌غیراز رسانندگی گرمایی که می‌تواند تابعی از دما باشد. در تحقیق دیگری [25]، آنها عملکرد یک حلگر مجزّا با همبستگی قوی را به کمک این مسئله در درجات مختلف همبستگی- با تغییر اعداد بدون بعد σ و گراشف- مورد مطالعه قرار دادند. همچنین Pan و همکاران [12]، به اعتبارسنجی و مطالعه کارایی الگوریتم هم‌زمان پیشنهادی در حالت درجات مختلف همبستگی در این مسئله پرداختند.

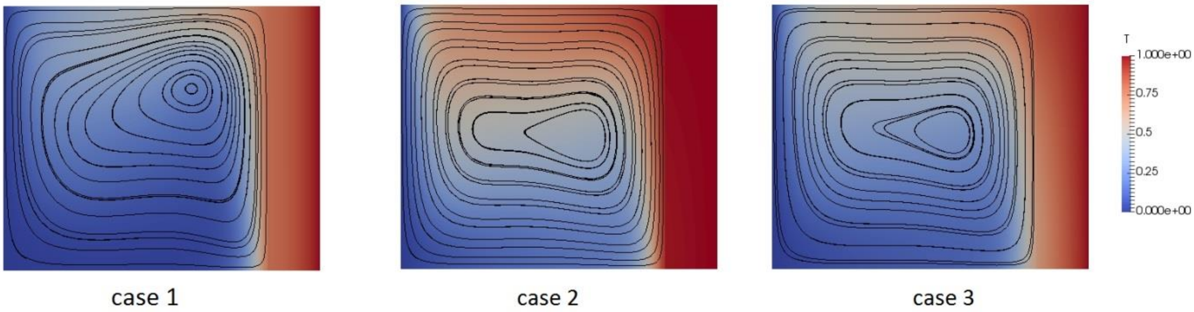
در تحقیق حاضر، سه حلگر SIPM-SP ،SIPM-IP و SIPM-M برای حل مسئلۀ مطرح شده استفاده می‌شوند تا بدین ترتیب دقّت نتایج الگوریتم‌های مذکور با نتایج موجود در مرجع [12] مقایسه و اعتبارسنجی گردد. جدول (١)، کمیت‌های بدون بعد برای خواص ذکر شده در این مرجع را نشان می‌دهد:

در این مطالعه، مقادیر هندسی شامل طول و عرض و ضخامت دیواره به‌صورت $L_1/L_2=1$ و $L_2=1$ و $L_1/L_s=0.2$ در نظر گرفته می‌شود. سیّال در شروع حل در حالت سکون با فشار و دمای صفر فرض می‌گردد. در لحظۀ t=0، دمای دیواره سمت راست در جامد ناگهان به ١ ($T_h=1$) افزایش می‌یابد و دمای دیواره سمت چپ سیّال در دمای صفر($T_C=0$) ثابت نگه داشته می‌شود. بقیۀ دیواره‌ها به‌جز مرز مشترک سیّال-جامد در شرایط عایق قرار داده می‌شود و شرط عدم لغزش بر روی چهار دیوار اطراف سیّال اعمال می‌گردد. در حلگرهای مجزّا، شرط همگرایی برای خروج از حلقۀ بیرونی به‌صورت $\frac{\max(r^n)}{\max(r^0)}<10^{-6}$ در نظر گرفته می‌شود که در آن r^n نشان‌دهنده باقیمانده روی مرز مشترک در تکرار n ام است. شکل ٥، خطوط جریان و توزیع دما در نواحی سیّال و جامد را در زمان t=0.07 sec نمایش می‌دهد.

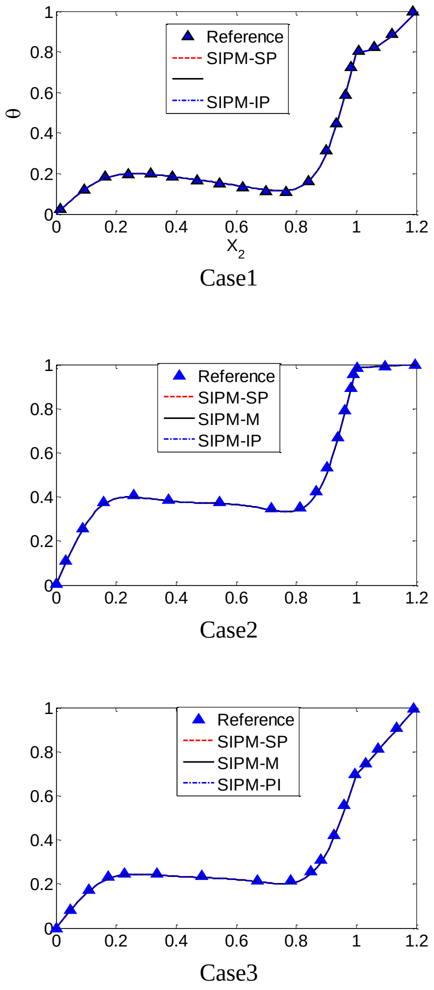
شکل (٦)، پروفیل دمای حاصل از سه حلگر و روی خط افقی مرکزی را با نتایج ارائه شده در مرجع [12] مقایسه کرده است. همان‌طور که از نمودارهای این شکل مشهود است هر سه حلگر در درجات مختلف از همبستگی، نتایجی تقریباً منطبق بر نتایج موجود در مرجع مورد نظر را ارائه می‌دهند.

جدول «١»: جزییات سه حالت مختلف برای مسئلۀ جابجایی آزاد در کنار دیوار عمودی

	جنس سیّال	جنس جامد	Pr	ks/kf	Gr	σ
حالت ١	هوا	فولاد	0.7	1600	1.43×105	3.95×10-4
حالت ٢	آب	فولاد	7	80	104	0.12
حالت ٣	آب	بتن	7	2.7	104	0.93



شکل «۵»: کانتور دما و خطوط جریان برای حالت‌های ۱ تا ۳



شکل «٦»: مقایسهٔ نتایج سه حلگر برای پروفیل دما روی خط افقی گذرنده از مرکز با نتایج مرجع [12]

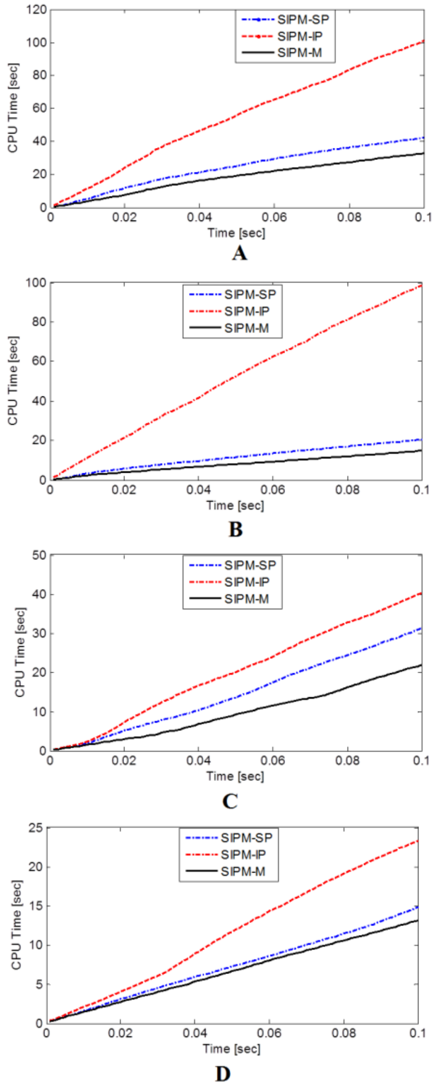
به‌منظور مقایسه هزینهٔ محاسباتی سه حلگر مورد نظر، خواص جدیدی برای سیّال و جامد در این مقاله پیشنهاد شده است به‌گونه‌ای که چهار حالت شامل ترکیب‌های مختلف قوی و ضعیف برای دو نوع همبستگی C_2–C_1 (قوی- قوی، قوی- ضعیف؛ ضعیف- قوی، و ضعیف- ضعیف) ایجاد گردد. جدول (۲)، جزییات مربوط به این چهار حالت را ارائه داده است.

جدول «۲»: مشخصّات چهار حالت برای جابجایی آزاد مجاور دیوار عمودی

	Pr	ks/kf	Gr	σ
CaseA	0.7	1.6	1.43×105	0.93
Case B	0.7	1.6	104	0.93
Case C	0.7	1600	1.43×105	4×10-4
Case D	0.7	1600	104	4×10-4

هزینه‌های محاسباتی مربوط به سه الگوریتم پیشنهادی برای حالت A تا D در شکل (۷) مقایسه شده است. همان‌طور که در نمودارها پیداست الگوریتم SIPM-IP همواره کندترین نرخ همگرایی را داشته است و این بخصوص برای حالت‌های A و B که همبستگی قوی بین معادلات انرژی در سیّال و جامد وجود دارد، کاملاً مشهود است. برای حالت B، استفاده از حلقهٔ جداگانه سرعت همگرایی را تا حدود ۵ برابر افزایش داده است. همچنین، برای تمام چهار حالت، الگوریتم SIPM-M سریع‌ترین نرخ همگرایی را نسبت به بقیهٔ الگوریتم‌ها نتیجه داده است. بااین‌وجود، نمودار همگرایی برای حالت B نشان می‌دهد که برای حالتی

که همبستگی نوع اوّل ضعیف است (عدد گراشف کم) هزینه‌های محاسباتی برای الگوریتم‌های مجزّا و هم‌زمان می‌توانند به هم نزدیک‌تر می‌شود. همچنین در حالتی که هر دو همبستگی از نوع ضعیف باشند دو الگوریتم مذکور تفاوت چندانی در بازده محاسباتی ندارند.



شکل «۷»: زمان محاسباتی صرف شده برای هر سه حلگر در چهار حالت جدول ۲

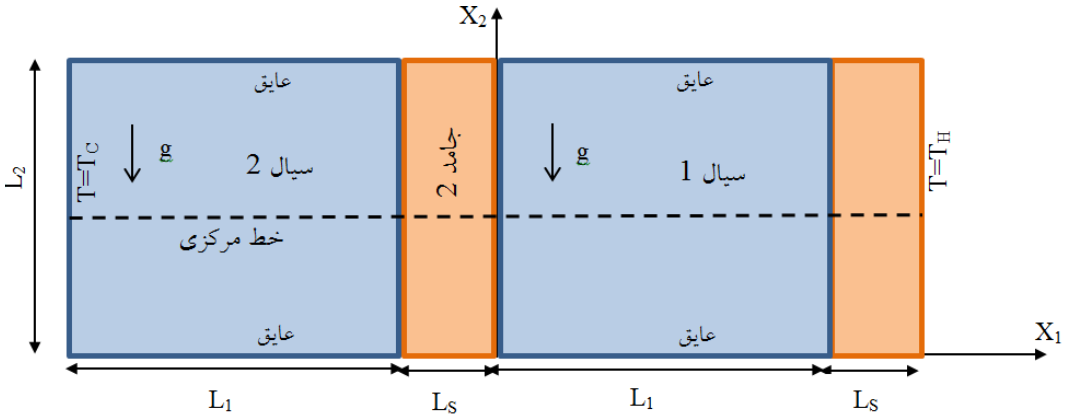
دو ناحیهٔ سیّال- دو ناحیهٔ جامد

به‌منظور بررسی بیشتر، مسئلهٔ مورد بحث به حالتی شامل نواحی بیشتر سیّال و جامد، همانند شکل (۸)، توسعه داده می‌شود تا عملکرد الگوریتم‌ها برای حالات با نواحی بیشتر نیز مورد مطالعه و مقایسه قرار گیرد. خواص سیّال و جامد در نواحی مختلف مطابق با جدول (۲) برای چهار حالت در نظر گرفته می‌شود.

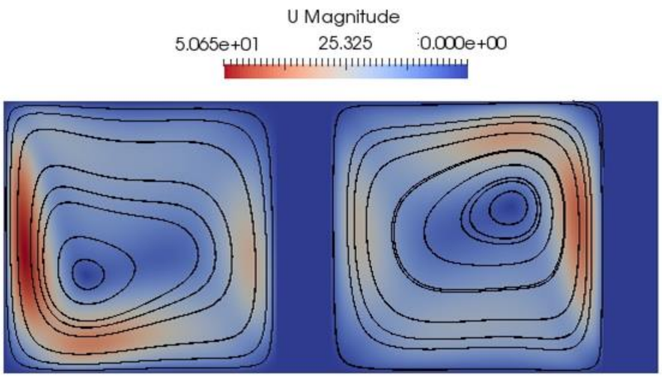
شرایط اوّلیه و مرزی برای این مسئله، همانند مسئلهٔ قبلی است با این تفاوت که در مسئلهٔ حاضر، دو ناحیه برای سیّال و دو ناحیه برای جامد وجود دارد. مسئلهٔ حاضر، این امکان را فراهم می‌آورد تا تأثیر افزایش تعداد نواحی بر احتمال مشاهده تفاوت معنی‌داری در هزینه‌های محاسباتی بررسی شود. به همین منظور، سه الگوریتم مورد بحث برای حالات A تا D در این مسئله به‌کار گرفته می‌شوند. شکل (۹) نتایج کیفی شامل توزیع سرعت و خطوط جریان حاصل از شبیه‌سازی به کمک الگوریتم هم‌زمان برای حالت A را نمایش می‌دهد.

به‌منظور مقایسه دقّت نتایج حاصل از سه الگوریتم، پروفیل دما روی خط افقی گذرنده از مرکز برای حالت A در شکل (۱۰) نشان داده شده است. بر اساس نمودار نشان داده در این شکل، تطابق پروفیل دمای حاصل از سه الگوریتم کاملاً واضح به نظر می‌رسد. همچنین، ازآنجایی‌که حالت A شامل دو نوع همبستگی قوی است بنابراین، بحرانی‌ترین حالت در نظر گرفته شده و از بررسی حالت B تا D صرف‌نظر می‌گردد. شکل (۱۱)، مقایسه‌ای از زمان محاسباتی برای سه الگوریتم مورد بحث جهت حل مسئلهٔ اخیر را نشان می‌دهد. همانند رفتاری که در شکل (۷) ملاحظه شد در اینجا نیز همواره الگوریتم هم‌زمان هزینهٔ محاسباتی کمتری را نتیجه می‌دهد. به‌علاوه، برای حالت B، استفاده از حلقهٔ جداگانه سرعت همگرایی را تا حدود ۶ برابر افزایش داده است؛ بنابراین می‌توان الگوریتم‌های مورد نظر را به لحاظ بازده محاسباتی به‌صورت زیر دسته‌بندی نمود:

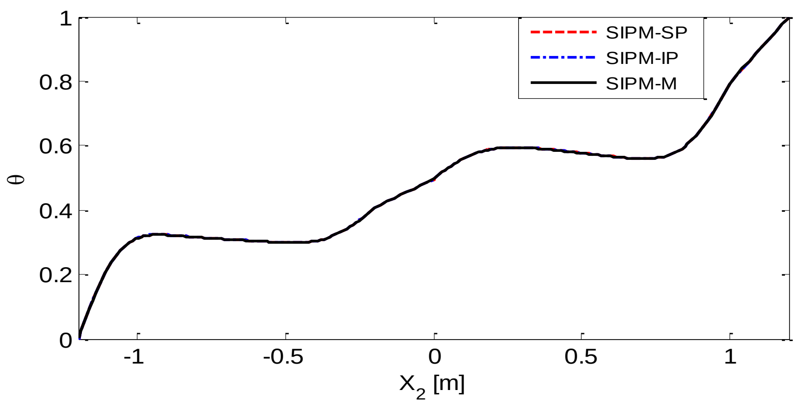
SIPM-M > SIPM-SP > SIPM-IP



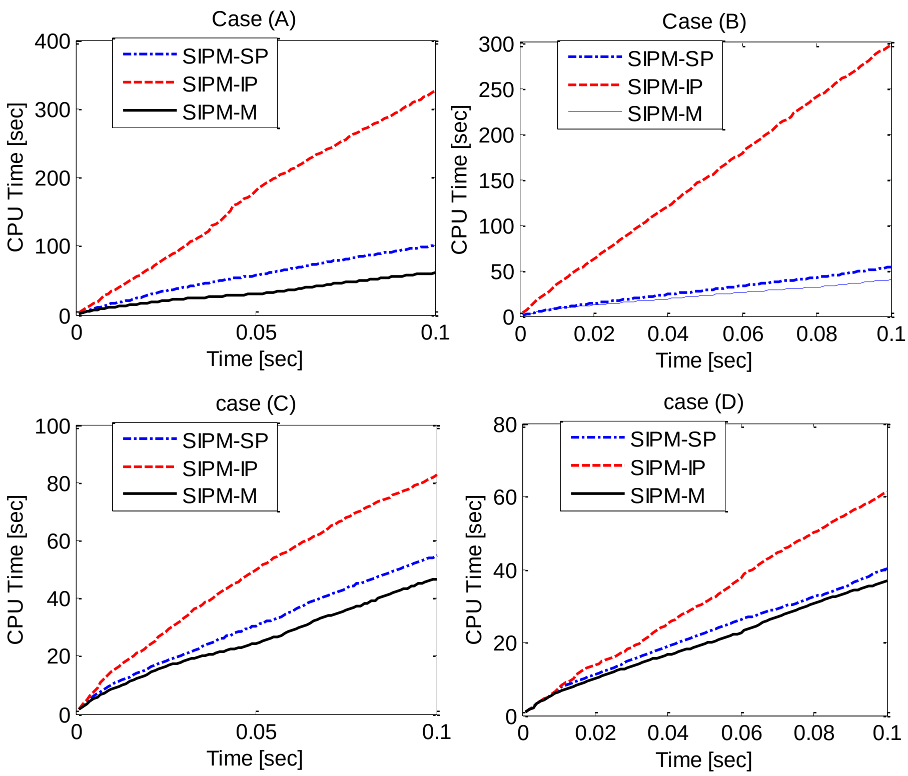
شکل «۸»: شماتیک مسئلهٔ چند ناحیه‌ای جابجایی آزاد مجاور دیواره عمودی



شکل «۹»: نتایج پروفیل دما حاصل از سه حلگر برای حالت A



شکل «۱۰»: کانتور سرعت و خطوط جریان برای حالت A



شکل «۹»: زمان محاسباتی مسئلهٔ چند ناحیه‌ای در ٤ حالت توسط سه حلگر

نتایج به‌دست‌آمده از حل مسائل بالا که برای همبستگی قوی و ضعیف و همچنین حالت‌های چند ناحیه‌ای صورت گرفت نشان می‌دهد که استفاده از یک حلقهٔ مشترک جهت اعمال همبستگی‌های C_1 و C_2 می‌تواند هزینهٔ محاسباتی را نسبت به الگوریتم‌های دیگر تا حد زیادی (حدود ٦ برابر) افزایش دهد؛ بنابراین، الگوریتم بکار گرفته شده در حلگرهای multiRegionHeatFoam و multiRegionSimpleFoam که از یک حلقهٔ مشترک جهت اعمال همبستگی‌های مذکور استفاده می‌کنند بازده محاسباتی دارند و با اضافه کردن یک حلقهٔ داخلی، می‌توان سرعت همگرایی آنها را تا حد زیادی افزایش داد. علت بازده پایین روش حلقهٔ مشترک را می‌توان در این حقیقت یافت که تضمین C_0 برای سیّال، پرهزینه‌ترین بخش الگوریتم‌های مورد نظر است و لذا حل دقیق دما در هر تکرار از حلقهٔ بیرونی، با توجّه به همبستگی نوع C_1، می‌تواند تعداد دفعات لازم جهت اعمال دقیق و پرهزینه C_0 را کاهش دهد. از طرف دیگر، در قیاس با تضمین C_0، حل معادلات انرژی به دلیل رفتار نسبتاً خطی، هزینهٔ محاسباتی پایینی دارد. در نتیجه، با توجّه به اینکه پرداختن هزینهٔ محاسباتی کوچک تضمین C_2، از تحمیل تعداد دفعاتی که الگوریتم باید هزینهٔ محاسباتی بالای اعمال C_0 را بپردازد، جلوگیری می‌کند، استفاده از حلقهٔ جداگانه برای اعمال همبستگی بین معادلات انرژی در نواحی سیّال و جامد، کارایی الگوریتم‌های CHT در حل مسائل با همبستگی قوی را افزایش می‌دهد.

از طرف دیگر مقایسه روش‌های حل همزمان و مجزاً، این واقعیت را نشان می‌دهد که روش حل همزمان معادلات انرژی سیّال و جامد، هزینهٔ محاسباتی پایین‌تری دارد و این امر بخصوص در مسائلی با همبستگی C_2 قوی، مشهود است. بااین‌وجود،

همان‌طور که از شکل‌های (۷ و ۱۱) (نمودارهـای A و B) نمایان اسـت، بـرای مسـائلی بـا همبسـتگی قـوی، تفاوت هزینهٔ محاسباتی ایجاد شده بین حل هم‌زمـان و مجزّا، به اندازه تفاوت استفاده از حالت حلقهٔ مشترک و مجزّا نیست و موضوع دوم، در درجهٔ اوّل اهمّیّت قـرار دارد.

نتیجه‌گیری

در این تحقیق، سه نوع حلگر عددی در زمینه اندرکنش حرارتی سیّال- جامد بر اساس نحوهٔ اعمال همبسـتگی بین معـادلات، مـورد بررسـی و مقایسـه قـرار گرفـت. همبستگی‌های مورد نظـر، شـامل همبسـتگی سـرعت- فشار و ممنتوم- انرژی در سـیّال و انـرژی- انـرژی در مـرز مشـترک سـیّال- جامـد اسـت. ویژگـی مشـترک الگوریتم‌هـای بررسـی شـده، اسـتفاده از روش حجـم محـدود جهـت گسسـته سـازی، روش PISO جهـت اعمال همبستگی سرعت- فشار، و اعمال قوی سه نـوع همبستگی مذکور است. نتایج این مطالعـه را مـی‌تـوان به‌صورت زیر بیان کرد:

- حل عددی مسائل اندرکنش حرارتـی سـیّال-جامـد، نیازمند توجّهی ویژه به ارتباط بین معادلات اسـت بخصوص زمانی که درجهٔ همبستگی آنهـا از نـوع قوی باشد.
- سه الگوریتم ارائه‌شده قادر به حل دقیق مسائل CHT هستند.
- حل هم‌زمان معادلهٔ انـرژی در تمـام نـواحی سـیّال و جامد، منجر به بازده محاسباتی بالا خواهد شد.

مقایسه نتـایج حاصـل از دو نـوع الگـوریتم مجـزّا نشان می‌دهد که استفاده از حلقه‌های جداگانه بـرای دو نوع همبسـتگی، سـرعت همگرایـی را تـا حـد زیـادی افزایش می‌دهد. لذا، حلگرهای مجـزّای OpenFOAM در مسـائل CHT، multiRegionHeatFoam و multiRegionSimpleFoam، با توجّه به عدم استفاده از حلقهٔ داخلی جهت تضمین همبستگی انـرژی- انـرژی، بازده محاسباتی پایینی دارند؛ بنابراین، بـرای مسـائل بـا همبستگی بالا، توصیه می‌شود حلگرهای مربوطه مطابق الگوریتم SIPM-SP اصلاح شوند.

واژه نامه

همبستگی قوی	Strong coupling
همبستگی ضعیف	Weak coupling
دیدگاه حل همزمان	Monolithic approach
دیدگاه حل مجزا	Partitioned approach
انتقـال حـرارت سـیال- جامد	Conjugate heat transfer
نرخ همگرایی	Convergence rate
چندناحیه‌ای	Multi-region
حل عددی	Numerical solution
روش حلقه‌ی مشترک	Integrated loop method
روش حلقه‌ی جداگانه	Separate loop method
انتقال حرارت هدایت	Conduction heat transfer
انتقال حرارت جابجایی	Convection heat transfer
معادلات حاکم	Governing equations
مرز مشترک	Interface
هزینه محاسباتی	Computational cost
اندرکنش حرارتی	Thermal interaction
روش گسسـته سـازی حجم محدود	Finite volume method

مراجع

1. Pozzi, A. and Tognaccini, R., "Time singularities in conjugated thermo-fluid-dynamic phenomena", *Journal of Fluid Mechanics*,Vol. 538, pp. 361-376, (2005).
2. Pozzi, A. and Tognaccini, R., "Coupling of conduction and convection past an impulsively started semi-infinite flat plate", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, pp. 1121-1131, (2000).
3. Fourcher, B. and Mansouri, K., "An approximate analytical solution to the Graetz problem with periodic inlet temperature", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 18, pp. 229-235, (1997).
4. Ismail, K. and Henriquez, J., "Two-dimensional model for the double glass naturally ventilated window", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 48, pp. 461-475, (2005).
5. Gunes, H., "Low-order dynamical models of thermal convection in high-aspect ratio enclosures", *Fluid Dynamics Research*, Vol. 30, pp. 1-30, (2002).
6. Park, S. and Lee, C., "Analysis of coherent structures in Rayleigh–Bénard convection", *Journal of Turbulence*, Vol. 16, pp. 1162-1178, (2015).
7. Moretti, R., Errera, M.-P., Couaillier, V. and Feyel, F., "Stability, convergence and optimization of interface treatments in weak and strong thermal fluid-structure interaction", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 126, pp. 23-37, (2018).
8. Felippa, C. and Park, K., "Staggered transient analysis procedures for coupled mechanical systems: formulation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 24, pp. 61-111, (1980).
9. Le Tallec, P., "Domain decomposition methods in computational mechanics", *Computational Mechanics Advances*, Vol. 1, pp. 121-220, (1994).
10. Piperno, S., Farhat, C. and Larrouturou, B., "Partitioned procedures for the transient solution of coupled aroelastic problems Part I: Model problem, theory and two-dimensional application", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 124, pp. 79-112, (1995).
11. Pan, X., Kim, K., Lee, C. and Choi, J.-I., "A decoupled monolithic projection method for natural convection problems", *Journal of Computational Physics*, Vol. 314, pp. 160-166, (2016).
12. Pan, X., Lee, C. and Choi, J.-I., "Efficient monolithic projection method for time-dependent conjugate heat transfer problems", *Journal of Computational Physics*, Vol. 369, pp. 191-208, (2018).
13. Radenac, E., Gressier, J. and Millan, P., "Methodology of numerical coupling for transient conjugate heat transfer", *Computers & Fluids*, Vol. 100, pp. 95-107, (2014).
14. Meng, F., Banks, J.W., Henshaw, W.D. and Schwendeman, D.W., "A stable and accurate partitioned algorithm for conjugate heat transfer", *Journal of Computational Physics*, Vol. 344, pp. 51-85, (2017).
15. Errera, M.-P. and Duchaine, F., "Comparative study of coupling coefficients in dirichlet–robin procedure for fluid–structure aerothermal simulations", *Journal of Computational Physics*, Vol. 312, pp. 218-234, (2016).
16. Scholl, S., Janssens, B. and Verstraete, T., "Stability of static conjugate heat transfer coupling approaches using Robin interface conditions", *Computers & Fluids*, Vol. 172, pp. 209-225, (2018).

17. Versteeg, H.K. and Malalasekera, W., "*An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*", Pearson Education, (2007).
18. Van der Heul, D.R., Vuik, C. and Wesseling, P., "A conservative pressure-correction method for flow at all speeds", *Computers & Fluids*, Vol. 32, pp. 1113-1132, (2003).
19. Uroić, T. and Jasak, H., "Block-selective algebraic multigrid for implicitly coupled pressure-velocity system", *Computers & Fluids*, Vol. 167, pp. 100-110, (2018).
20. Jasak, H., Jemcov, A. and Tukovic, Z., "OpenFOAM: A C++ library for complex physics simulations, International workshop on coupled methods in numerical dynamics", IUC Dubrovnik Croatia, pp. 1-20, (2007).
21. Konle, M., AG, M.A.E., de Guillebon, L. and Cottier, F., "Multi-Physics Simulations of an Aero Engine Combustor with OpenFoam", *Proceedings of 1st Global Power and Propulsion Forum*, GPPF-2017-0045, Zurich, (2017).
22. el Abbassia, M., Lahaye, D. and Vuik, C., "Modelling turbulent combustion coupled with conjugate heat transfer in openfoam", *Conference: Tenth Mediterranean Combustion Symposium*, (2017)
23. Issa, R.I., "Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting", *Journal of Computational Physics*, Vol. 62, pp.40-65, (1986).
24. Kazemi-Kamyab, V., Van Zuijlen, A. and Bijl, H., "Accuracy and stability analysis of a second-order time-accurate loosely coupled partitioned algorithm for transient conjugate heat transfer problems", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 74, pp. 113-133, (2014).
25. Kazemi-Kamyab, V., Van Zuijlen, A. and Bijl, H., "Analysis and application of high order implicit Runge–Kutta schemes for unsteady conjugate heat transfer: A strongly-coupled approach", *Journal of Computational Physics*, Vol. 272, pp. 471-486, (2014).